

Opgaver til kursusgang 13: Differentialregning 1

1. Differentier funktionerne

$$f(x) = -2x^2, \quad f(x) = 4\sqrt{x}, \quad f(x) = e^{-3x}.$$

2. Bestem $f'(-1)$ for funktionerne

$$f(x) = -x^4, \quad f(x) = \frac{5}{x}, \quad f(x) = 4^x.$$

3. Brug regnereglen $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$ til at differentiere funktionerne

$$f(x) = x^3, \quad f(x) = 3 + x, \quad f(x) = \sqrt{x}, \quad f(x) = \frac{1}{x}, \quad f(x) = 2x^6.$$

4. Differentier funktionerne

$$f(x) = 3e^{2x} - \frac{1}{2}\ln x, \quad f(x) = \frac{1}{2}\sin x, \quad f(x) = \ln(x^2) + 3e^{-2x}$$

5. Differentier funktionerne

$$f(x) = 3x^7 + 2x^4 - 3x^2, \quad f(x) = 2x^5 + 3x^{\frac{3}{2}} - 2x^{-2}, \quad f(x) = 3\sqrt{x} + \frac{1}{x}.$$

6. Bestem $f'(1)$ for funktionen $f(x) = 3x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 1$.

7. Bestem for hver af de blå grafer i Figur 1 hvilken af de røde grafer der beskriver den afledede.

8. Differentier funktionerne (Hint: Reducer først udtrykkene, så de kan differentieres med de to regneregler, der er nævnt i dette kapitel.)

$$f(x) = 3\sqrt[3]{x}, \quad f(x) = (2x - 1)x^2, \quad f(x) = (5x + 3)(2x^2 - 2)(x + 7).$$

9. Bestem, for hver af de følgende funktioner, de punkter hvor tangenthældningen er 2.

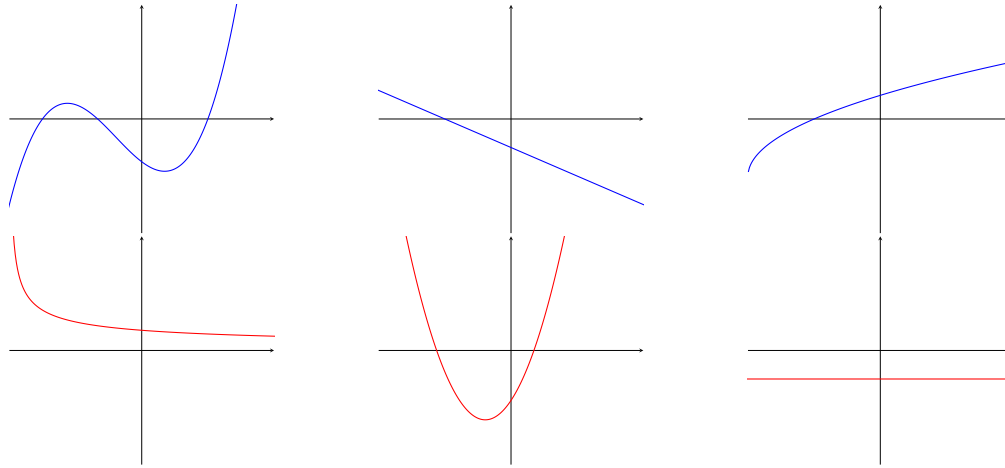
$$f(x) = \frac{x^3 - 2x}{x}, \quad f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 2x + 7,$$

10. Lad $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ og $g(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$. Bestem $(f + g)'(x)$ og $(f - g)'(x)$.

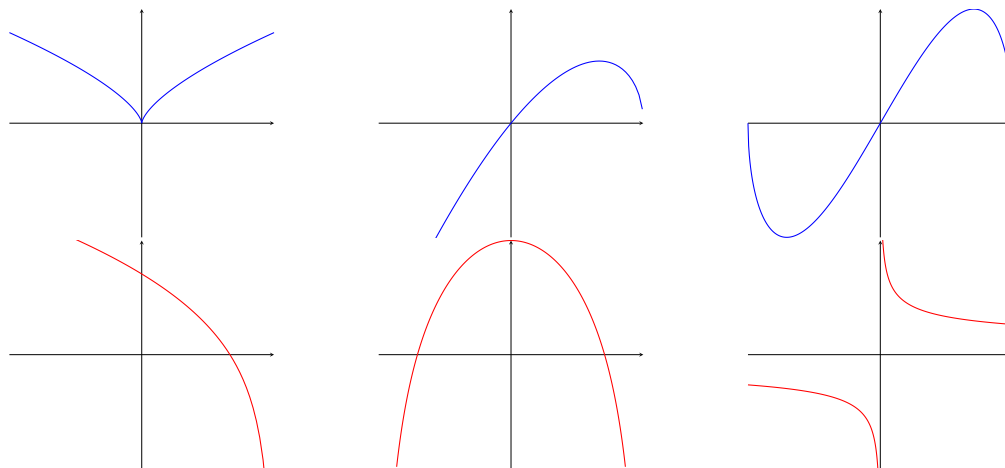
11. Differentier funktionerne

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} + 1}{x}, \quad f(x) = \frac{x^2\sqrt{x^3}}{x^{-1/4}}, \quad f(x) = \ln\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

12. Bestem for hver af de blå grafer i Figur 2 hvilken af de røde grafer, der beskriver den afledede.



Figur 1: Opgave 7



Figur 2: Opgave 12

13. Differentier funktionerne

$$f(x) = -\ln\left(\frac{1}{x^3}\right),$$

$$f(x) = \sqrt{e^{6x}}.$$

14. Brug definitionen af differentialkvotienten til at finde den afledede af funktionerne

$$f(x) = k,$$

$$f(x) = x,$$

$$f(x) = kx.$$

EKSTRAOPGAVER:

15. Brug definitionen af differentialkvotienten til at finde den afledede af funktionerne

$$f(x) = x^2,$$

$$f(x) = \frac{1}{x},$$

$$f(x) = \sqrt{x}$$

16. Lad $f(x) = x - 2\cos x$.

(a) Bestem alle punkter hvor $f'(x) = 1$.

(b) Vis at alle punkter på formen $(x, f(x))$ hvor x er som i del (a) ligger på en af de to linjer

$$y = x + 2, \quad \text{eller} \quad y = x - 2.$$

(Hint: Se Figur 3.)

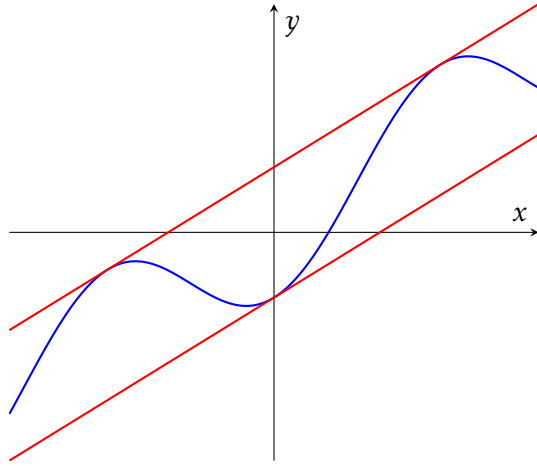
17. På Figur 4 ses en cirkel med radius r samt en tangent til cirklen som tangerer cirklen i punktet P . Lad s betegne buelængden fra punktet $(1,0)$ til P , lad θ betegne vinklen mellem vandret og tangenten og lad ϕ betegne vinklen mellem vandret og P .

(a) Argumenter for at $\theta = \frac{\pi}{2} + \phi$.

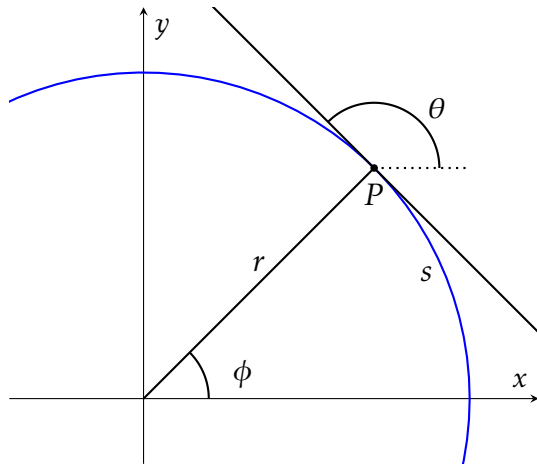
(b) Brug formlen for længden af en cirkelbue: $\phi r = s$, til at beskrive θ som en funktion af s .

(c) Vis at

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{r}.$$



Figur 3: Opgave 16



Figur 4: Opgave 17