Facit til kursusgang 12: Grænseværdi og kontinuitet

1. Svarene er

$$\lim_{x\to 2}(3x+1)=7, \qquad \lim_{x\to -1} x=-1, \qquad \lim_{x\to 0} x\cdot(x-1)=0, \qquad \lim_{x\to -3}\frac{x+3}{x+1}=0$$

2. Svarene er: $\lim_{x\to 1} f(x)=5$ og $f(1)=6$, derfor er f ikke kontinuert.
3. Svarene er: $\lim_{x\to 2} f(x)=7$ altså er f kontinuert da $f(2)=7$.
4. Grænsen eksisterer og er lig 1 fra både højre og venstre.
5. Svarene er: $f(1)=2$ samt at f er ikke kontinuert i 1 da $\lim_{x\to 1^+} f(x)=3$ og $\lim_{x\to 1^-} f(x)=1$.
6. Svarene er: $a=5$ og $b=3$.
7. Svarene er:

$$0, \qquad 6e^4, \qquad -\ln(2).$$

8. Svarene er:

$$9, \qquad -1, \qquad -4, \qquad -\frac{1}{2}$$

9. Svarene er:

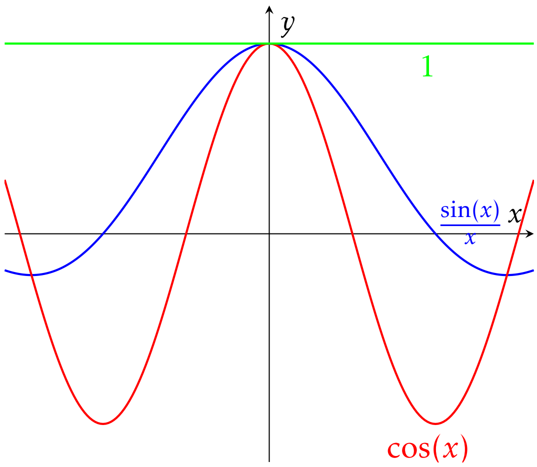
$$0, \qquad -6$$

EKSTRAOPGAVER:

10. Svarene er: $f(0)=0$, $\lim_{x\to 0^+} f(x)=1$ og $\lim_{x\to 0^-} f(x)=-1$. Funktionen f er kontinuert i alle punkter undtagen 0.
11. Svarene kan være:

    (a) Arealet af ΔABD er givet ved $\frac{1}{2}\sin(x)$ da grundlinjen i trekanten er 1. Arealet af enhedcirklen er π så da det grå cirkeludsnit udgør $\frac{x}{2\pi}$ af hele cirklen må dets areal være $\pi\frac{x}{2\pi}=\frac{x}{2}$. Arealet af ΔACD er givet ved $\frac{1}{2}\tan(x)$ da grundlinjen i cirklen er 1. Det er klart at ΔADB har areal mindre end det grå cirkeludsnit som så har areal mindre end ΔACD. Dette giver den ønskede ulighed

$$\frac{1}{2}\sin(x)\le\frac{1}{2}x\le\frac{1}{2}\tan(x).$$



Figur 1: Funktionen $\frac{\sin(x)}{x}$ "klemmes" af 1 og $\cos(x)$.

(b) Ved at gange uligheden med 2 og dividere med $\sin(x)$ får vi

$$1 \leq \frac{x}{\sin(x)} \leq \frac{1}{\cos(x)}. \tag{1}$$

Bemærk at vi har brugt at $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$. Hvis vi ganger den første ulighed i (1) igennem med $\frac{\sin(x)}{x}$ får vi at

$$\frac{\sin(x)}{x} \leq 1. \tag{2}$$

Ganger vi den anden ulighed i (1) igennem med $\frac{\sin(x)\cos(x)}{x}$ får vi at

$$\cos(x) \leq \frac{\sin(x)}{x}. \tag{3}$$

Kombinerer vi (2) og (3) får vi den ønskede ulighed

$$\cos(x) \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq 1. \tag{4}$$

(c) Fra (4) ses at $\frac{\sin(x)}{x}$ ligger mellem $\cos(x)$ og 1. Når x går mod 0 går $\cos(x)$ mod 1 og da uligheden gælder for alle x tæt på nul må $\frac{\sin(x)}{x}$ nødvendigvis også gå mod 1. Man kan se det som at $\frac{\sin(x)}{x}$ bliver klemt sammen af $\cos(x)$ og 1 omkring punktet $x = 0$ (se evt. Figur 1).

12. Hvis vi benytter os af hintet får vi

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x} = \left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}\right)\left(\lim_{x\to 0} \frac{-\sin(x)}{1+\cos(x)}\right) = -\frac{\sin(0)}{1+\cos(0)} = 0.$$